Пименов Револьт Револьтович

В МИРЕ ПОЛОМАННЫХ ЛИНЕЕК

С января этого года я веду еженедельный кружок «Эстетическая геометрия» в лицее «Физико-техническая школа». Инициатор кружка – Валерий Идельевич Рыжик, ранее познакомившийся с моими работами о геометрии окружности и ее картинами

Материал, связанный с геометрией окружности (симметрий окружности и инверсии) важен и полезен для школьников. Причин так много, что их трудно перечислить: это формирует математическое мышление, позволяет осваивать абстрактные понятия на конкретных и красивых примерах, вносит игровой элемент в занятия, вводит школьников в круг идей и методов теории групп, осовременивает преподавание математики. Самое главное – тема будет интересна и школьникам, и учителям и может быть «сквозной», на протяжении нескольких лет развивая навыки и умения детей в соответствии с их возрастом. Некоторые уроки можно проводить совместно с учителями рисования.

Мною разработаны компьютерные средства, позволяющие обучать элементам геометрии окружности даже в младших классах. В кружке успешно занимаются школьники 8–9 классов. В.И.Рыжик активно участвовал в занятиях, что облегчало усвоение учениками материала, а я с благодарностью пользовался его методическими советами.

С самого начала я ставил связанные между собой задачи:

1. Изложить элементы теории групп движений с помощью симметрий относительно окружностей и прямых. Показать, как с помощью этих методов можно узнавать новые, геометрически содержательные теоремы и создавать красивые картины.

2. Познакомить школьников с рядом теорем про окружности.

3. Рассказать решение задачи Аполлония о нахождении окружности, касающейся трех данных, основанное на симметричных и перпендикулярных окружностях.

4. Подготовить школьников к единообразному моделированию евклидовой и неевклидовой геометрий.

В решении этих задач, кроме материалов по геометрии окружности, изложенных на сайте http://revolt33.narod.ru/matem/Bereg_site/index.html, мне помогают авторские программные средства и компьютерный дизайн:

1. Программа DodecaLook, демонстрирует красоту геометрии окружности. Именно из-за того, что геометрия окружности прямо связана с законами эстетики, я и называю курс: «Эстетическая геометрия». Программа показывает движение гармонических разноцветных форм. О программе была статья в журнале «Компьютерные инструменты в образовании», № 5 за 2006 год. Программу можно скачать в интернете по ссылке http://revolt33.narod.ru/texts/demo.rar Программа использовалась в ходе занятий, чтобы увлечь школьников.

2. Серия DodecaTeach учебных интерактивных flash-программ по геометрии окружности. Программы доступны учащимся самого разного уровня и знакомят с важнейшими понятиями (симметрия окружностей,

перпендикулярность окружностей, теорема о трех окружностях, фракталы) эстетической геометрии. Программы можно скачать по ссылке http://revolt33.narod.ru/teach/komet.html.

3. DDU-макросы, позволяющие в CorelDraw рисовать окружность по трем точкам, находить точки пересечения окружностей, инвертировать относительно данной окружности, осуществлять композицию симметрий относительно 2, 3 или 4 окружностей, рисовать окружности под заданным углом. При этом создаются изысканные картины.

4. Обширная DDU-библиотека компьютерной графики.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЙ

1. Вводный урок. Цель урока – увлечь учащихся изучением свойств окружностей. Рассказывалось о свойствах окружностей и сфер, важных для понимания физического мира, о проявлении окружности и сфер в природе, в архитектуре, дизайне и технике. Запускалась программа DodecaLook. Объяснялось, что законы, управляющие возникающими образами, следуют из геометрии окружности.

Затем указывалось, что прямую и точку можно рассматривать как крайние, исключительные случаи окружности: точка это окружность очень малого радиуса, прямая – окружность очень большого радиуса. Поэтому, окружность – нечто промежуточное между точкой и прямой.

Далее было объявлено, что в эстетической геометрии мы попадаем в мир, где поломаны линейки, поэтому мы не умеем больше проводить прямую через две точки. Но каким-то чудесным образом мы умеем проводить окружность через три точки (именно эта ситуация возникает при работе с ddu-макросами в Coreldraw). Указывалось, что в мире окружностей существует симметрия. Далее рассказывалось о серединной окружности, осуществляющей симметрию (инверсию) между двумя данными пересекающимися окружностями. Это делается через рассмотрение семейства окружностей, касающихся двух данных. Теорема вызвала интерес учащихся. Формулировалась задача Аполлония.

...в эстетической геометрии мы попадаем в мир, где поломаны линейки...

2. Второй урок. В начале урока с помощью интерактивной flash-программы lesson1 давалось наглядное преставление о симметрии между окружностями или инверсии. Демонстрировались свойства инверсии, затем давалось строгое определение инверсии (через произведение соответственных длин и через геометрическое построение касательных и секущих). При этом фундаментальные свойства – окружности при инверсии переходят в окружности или прямые – не доказывались. Обращалось внимание, что прямые сейчас и в дальнейшем будут рассматриваться как частный случай окружностей. Указывается, что окружность может разделять пару точек или окружностей, и это свойство сохраняется при инверсии.

Вводится важная форма записи $C = A(B)$, означающая, что C есть образ окружности B при симметрии (инверсии) относительно A или, что B и C симметричны относительно A. Указывается, что эту запись можно использовать и при изучении симметрий относительно прямых. Тогда A, B, C – будут обозначать прямые. Обращаем внимание, что $A(A(X)) = X$ – дважды примененная симметрия возвращает все объекты в исходное состояние. Обращалось также внимание учащихся, что для определения симметрии между окружностями мы использовали элементы геометрии Евклида: прямые и расстояния, но в дальнейшем мы определим симметрию между окружностями, только проводя окружности, не пользуясь линейками и даже не пользуясь понятием центра окружности. В ходе дальнейших нескольких занятий обычно предполагалось, что мы каким-то образом умеем инвертировать точку и окружность относительно окружности, проводить окружность через три точки – а больше ничего делать с окружностями не можем.

3. Третий урок. Вводилось фундаментальное понятие перпендикулярных или ортогональных окружностей. Использовалась flash-программа lesson2. Окружности A и B называются ортогональными, если $A(B) = B$ и $B(A) = A$. При этом особо указывалось, что при симметрии относительно A окружность B остается неподвижной (как прямая остается неподвижной при симметрии относительно перпендикулярной ей прямой), но отдельные точки на B не остаются неподвижными. Рассматривалось основное свойство перпендикулярных окружностей: если пара точек симметрична относительно данной окружности, то любая окружность, проходящая через эту пару точек, – перпендикулярна данной окружности. Используя основное свойство, доказывалась первая теорема эстетической геометрии – о двух симметричных парах точек: Если дана окружность A, то для любых точек X, Y четыре точки X, Y, $A(X)$, $A(Y)$ – всегда лежат на одной окружности.

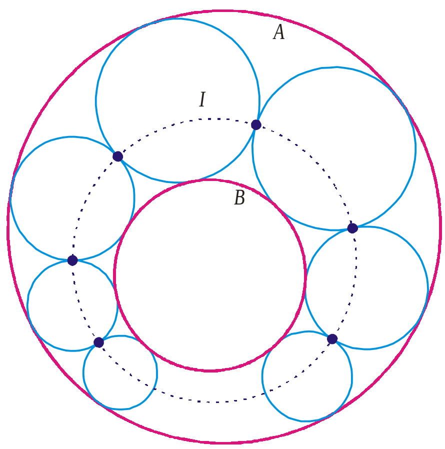
Теперь, когда учащиеся освоились с инверсией, доказывалась теорема о серединной окружности (рис. 1), рассказанная на первом уроке. Рассматривалась инверсия с центром в одной из точек пересечения данных окружностей. Данные окружности переходят в прямые при такой инверсии, и теорема становится тривиальной, прекрасно воспринимаемой учащимися. Важно, что таким образом демонстрируется плодотворность вводимых понятий, а при доказательстве учащиеся проявляли большую и разумную активность.

...прямые мы... рассматриваем как частный случай окружностей...

В конце урока был поставлен вопрос о последовательных симметриях относительно пары прямых A и B. Учащимся предлагалось разобраться, чем будет $A(B(X))$, если A и B перпендикулярны, параллельны, пересекаются под заданным углом. Также рассматривалось последовательное применение центральных симметрий (относительно точек A и B), которое представляет собой параллельный перенос на удвоенное расстояние между A и B. Часть этих вопросов разбиралась в классе, часть предлагалась для самостоятельной работы.

4. Четвертый урок. Цель урока: упростить осознание идей теории групп с помощью наглядных геометрических примеров. Тема урока: композиция симметрий и перпендикулярность в геометрии прямых и окружностей. Связь ортогональных и касательных окружностей.

В начале занятий закрепляется, что композиция центральных симметрий относительно двух точек – параллельный перенос,



Все окружности-“лепестки” касаются двух окружностей A и B. Точки касания “лепестков” сами обязательно лежат на одной окружности I, относительно которой A и B симметричны. $I(A) = B$. При этой симметрии точки касания лепестков остаются неподвижны.

I называется *серединной окружностью* для A и B, или *биссектрисой* между A и B. Каждая окружность-“лепесток” перпендикулярна I.

Лепестки не разделяют A и B.

Рис. 1

композиция симметрий относительно двух пересекающихся прямых – поворот, композиция симметрий относительно двух параллельных прямых – параллельный перенос. Вводится общее понятие композиции преобразований, композиции функций (последнее – на примерах, известных из курса алгебры функций). Вводится обозначение: для композиции $A \cdot B = h$ означает, что для любого X: $A(B(X) = h(X)$, где A и B – какие-то функции. Вводится понятие тождественного движения, и обозначение для него «e». Для любого X: e(X)=X. Указывается, что если A и B – ортогональные прямые, то $A(B(X)) = B(A(X))$, или $A(B(A(B(X)) = X$, или, в новой форме записи, $A \cdot B = B \cdot A$ (коммутативность) и что эта композиция есть центральная симметрия относительно точки пересечения A и B. Указывается, что подобное свойство проявляется при композиции перпендикулярных плоскостей или перпендикулярных прямых в трехмерном пространстве. Важно не делать тяжелой эту часть урока, не вводить новые термины без необходимости. При рассказе демонстрируются образы из DDU-библиотеки геометрии окружности, созданные с помощью композиции преобразований. Привлекательность этих образов мотивирует интерес к понятию композиции.

В оставшейся части урока использовалась flash-программа Lesson2 о перпендикулярных окружностях. Показывалось, как провести окружность, проходящую через две данные точки и перпендикулярную данной окружности, обращалось внимание на сходство этого построения с опусканием перпендикуляра из точки на прямую. Разбирался случай, когда обе данные точки лежат на данной окружности, и доказывалось, что если три окружности пересекаются в одной точке и одна из них перпендикулярна двум другим, то две ортогональные ей окружности касаются друг друга.

5. Пятый урок. Рассказывалось решение задачи Аполлония, новый способ построения симметрии относительно окружности, вводилось общее понятие инволютивных отображений.

Для того чтобы построить окружность, вписанную в треугольник, надо провести две биссектрисы, найти точку их пересечения, опустить из нее перпендикуляры на стороны треугольника, и через основания этих перпендикуляров провести окружность – она и будет искомой. Решение задачи Аполлония проводится совершенно аналогично. Роль биссектрисы между окружностями играет серединная окружность (относительно которой они симметричны). Для удобства рассмотрим случай, когда все три исходные окружности A, B, C пересекаются и одна окружность разделяет точки пересечения двух других. В этом случае три окружности разделяют всю плоскость на 8 областей (одна из них неограниченна), в каждой области можно построить искомую окружность. Выберем область, лежащую внутри всех трех окружностей. Проведем биссектрису (серединную окружность) между A и B, проходящую через выбранную область, затем биссектрису между B и C, также проходящую через выбранную область. Их пересечение – две точки.

В треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, из которой следует опускать перпендикуляры. В трехокружнике биссектрисы пересекаются в двух точках. проведем через эту пару точек окружность, перпендикулярную A (иначе говоря, опустим из пары точек перпендикуляр на окружность A, сторону трехокружника). На предыдущем занятии рассказывалось, как это делается. Эта перпендикулярная к A окружность пересекает A в двух точках. Возьмем из них ту, которая лежит на границе выбранной ранее области. Затем проведем из пары точек пересечения биссектрис перпендикуляр на B, вторую сторону трехокружника, и из пары точек пересечения перпендикуляра с В выберем ту, которая лежит на границе нужной нам области. Наконец, опустим перпендикуляр на C и получим третью нужную точку. Через три полученные точки проведем окружность. Она и будет искомой!

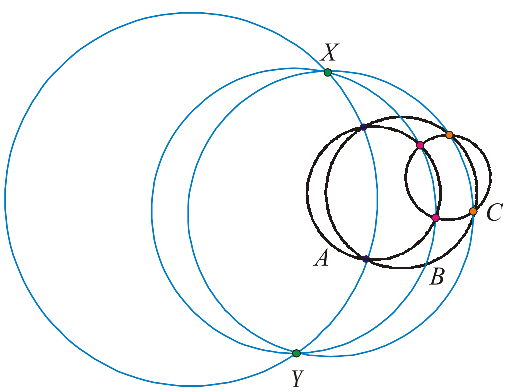
Ученики восприняли это построение несколько ошеломленно. Но хорошо поняли его аналогию с построением окружности, вписанной в треугольник, и спросили о доказательстве. Доказательство будет им дано на следующих занятиях.

Далее ставится вопрос: мы научились проводить окружности, ортогональные данной окружности A, строя точки, симметричные относительно данной окружности. Предположим, что мы умеем проводить окружности, ортогональные A, но не умеем осуществлять инверсию относительно A. Как по произвольной точке X найти $A(X)$. Учащиеся моментально ответили: провести через X две окружности, ортогональные A. Вторая точка пересечения и будет искомой $A(X)$. Последовал новый вопрос: а если мы и ортогональные окружности проводить не умеем, как построить $A(X)$? Что нужно знать для этого? Достаточно знать две пары точек, симметричных относительно A. Пусть даны точки C и $A(C)$, тогда окружность, проходящая через X, C и $A(C)$, ортогональна A (по основному свойству перпендикулярных окружностей), следовательно, $A(X)$ лежит на проведенной окружности. Пусть мы знаем еще одну пару точек B и $A(B)$, снова проведем окружность через X и эту новую пару точек, $A(X)$ должно лежать и на этой окружности. Следовательно, $A(X)$ – вторая точка пересечения двух проведенных окружностей, и по двум парам симметричных точек мы можем построить образ любой точки при инверсии. Учитель обращал внимание, что никакого подобного простого способа строить образ точки при симметрии относительно прямой – не существует. Для этого потребуется измерять длины или проводить прямые углы, а в геометрии окружности достаточно лишь провести две окружности.

В завершение урока давалось определение инволютивных функций. Функция f называется инволютивной, если $f(f(x)) = x$, в других обозначениях $f \cdot f = e$ (тождественное движение). Все симметрии, по определению, – инволютивны. Давались разные примеры инволютивных операций (включить и выключить свет нажатием на кнопку). Учащихся просили самостоятельно привести примеры инволютивных функций над числами. Быстро последовал ответ: $f(x) = –x$, затем $f(x) = a – x$, позже было указано $f(x) = a/x$. Для самостоятельного рассмотрения была дана задача на композицию функций: пусть $f(x) = 1 – x$, $h(x) = 1/x$. Обозначим $g = f \cdot h$. Доказать: $g \cdot g \cdot g = e$ или $g(g(g(x))) = x$.

6. Шестой урок. Цель урока: закрепить понятие композиции функций, ввести и использовать свойство ассоциативности. Познакомить с фундаментальной теоремой курса эстетической геометрии: «Теорема о трех окружностях».

Дома учащиеся выполнили вычисления, нужные для решения задачи о тройном применении функции g. Ставится новая задача: ранее (см. выше) $g = f \cdot h$. Пусть теперь $q = h \cdot f$ (применяем функции в другом порядке). Доказать, что $q \cdot q \cdot q = e$. Прямое решение задачи требует вычисле-



Теорема о трех окружностях. *Даны три пересекающиеся между собой окружности A, B, C. Если пара точек X, Y лежит на одной окружности с парой точек пересечения B и C, то она обязательно лежит на одной окружности с парой точек пересечения A и C.*

Стереодоказательство: пусть точка X не лежит на одной сфере с окружностями A, B, C. Проведем три сферы через X и окружности A, B, C. Линии пересечения этих сфер между собой – окружности, проходящие через X и пары точек пересечения A, B, C. По условию X и Y лежат на двух таких окружностях, следовательно, они являются точками пересечения трех сфер и лежат и на третьей окружности пересечения двух сфер. Что и требовалось доказать.

Рис. 2

ний. Предложено следующее решение: рассмотрим произведение $(q \cdot q \cdot q) \cdot (g \cdot g \cdot g) =$ $= ((h \cdot f) \cdot (h \cdot f) \cdot (h \cdot f)) \cdot ((f \cdot h) \cdot (f \cdot h) \cdot (f \cdot h))$. По закону ассоциативности, скобки в выражении можно раскрывать и ставить как угодно – результат не изменится. Раскроем скобки точно в середине этой длинной композиции: так как $f \cdot f = e$ (e – инволютивна), то f можно из середины выражения вычеркнуть. Тогда в середине выражения появится $h \cdot h = e$, h – тоже сокращается. И так сократится все выражение, значит, эта длинная композиция равна e: $(q \cdot q \cdot q) \cdot (g \cdot g \cdot g) = e$. Было доказано ранее, что $g \cdot g \cdot g = e$, подставим $(q \cdot q \cdot q) \cdot e = e$, следовательно, $q \cdot q \cdot q = e$, что и требовалось доказать.

Теорема о трех окружностях (рис. 2) и ее связь с симметрией подробно изложена в flash-программе lesson3, которая и использовалась в ходе занятий.

Эти уроки вводят основные понятия и методы эстетической геометрии. Геометрический материал, содержащийся в них, полностью изложен на сайте (теорема о трех окружностях там называется теоремой о

шести окружностях) и во flash-программах: Lesson1, Lesson2, Lesson3 (кроме задачи Аполлония и серединной окружности). Принципиален метод, указанный на уроках 5 и 6: строить инверсию, не проводя прямых и не измеряя расстояний, по двум парам симметричных (инверсно сопряженных) точек.

Следующие уроки, как правило, состояли из двух частей. В одной части изучались композиции симметрий относительно прямых и окружностей (последнее с помощью DDU-макросов, ученики сразу создавали интересные изображения (рис. 3, 4), из-за которых занятия затягивались). Было доказа-

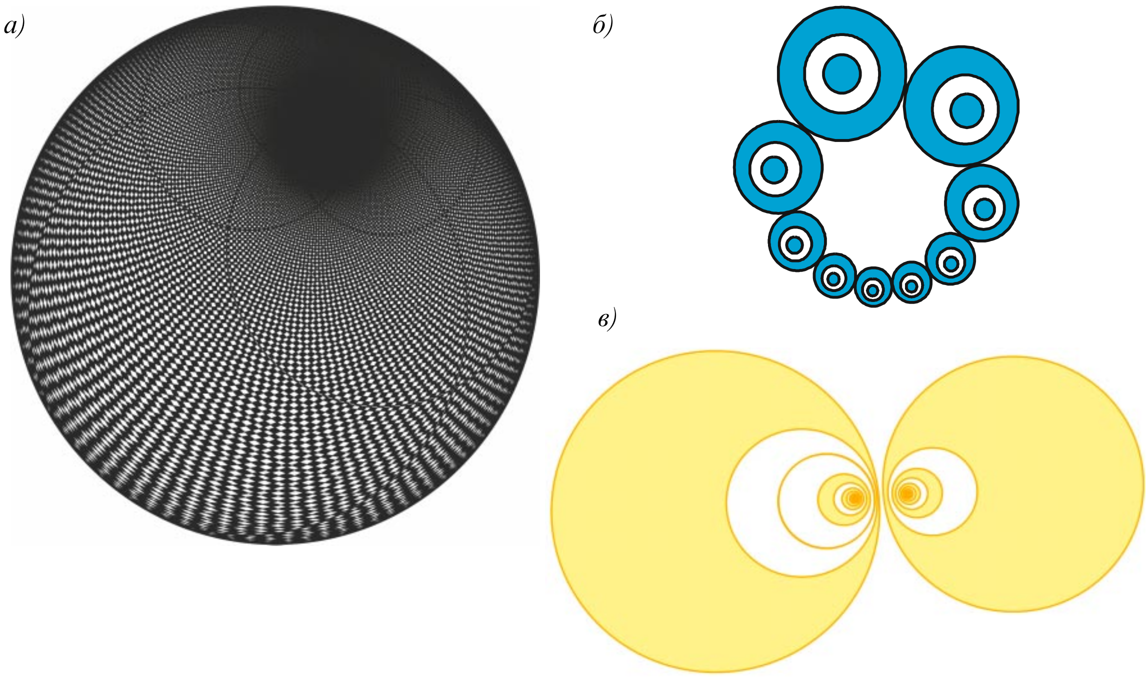
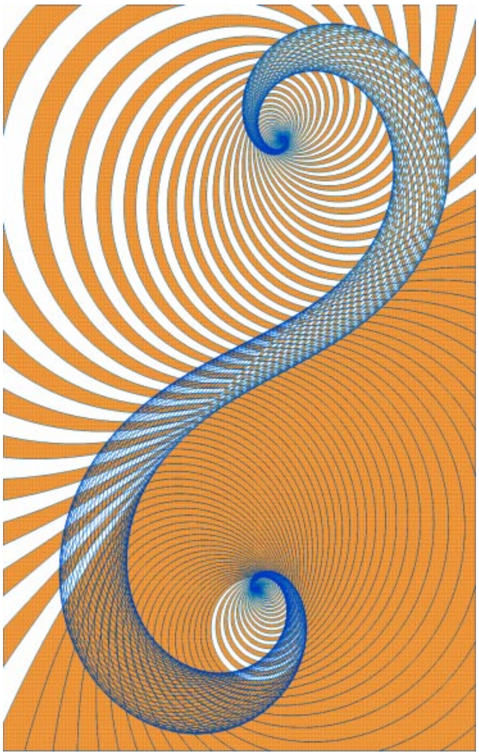
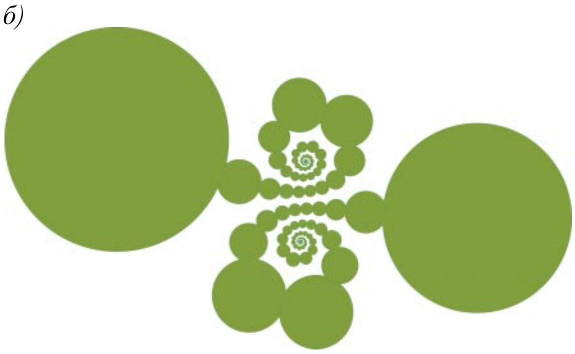


Рис. 3. Изображения, созданные учениками 9-го класса:
а) «шахматная доска», *б)* турецкий глаз, *в)* окружности, инвертирующиеся в себя
(авторы: Петр Кукуй, Станислав Сычев)

а)



б)



в)

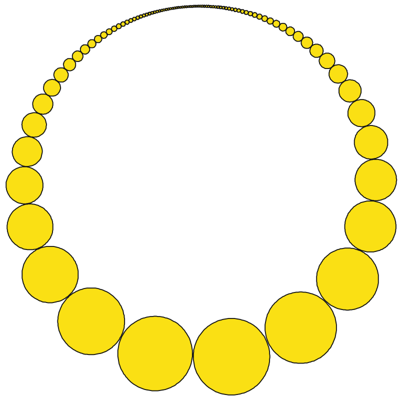


Рис. 4. Изображения, созданные учениками 9-го класса:
а, б) спирали, *в)* 90 касающихся окружностей
(авторы: Антон Егоров, Станислав Сычев)

но, что композиция симметрий относительно четырех прямых сводится к композиции симметрий относительно двух прямых. Занятия продолжаются, я планирую часть теорем о симметрии прямых перенести на симметрию окружностей и рассказать о свойствах трех взаимно перпендикулярных окружностей и их связи с четырьмя взаимно касающимися окружностями. В другой части – доказывались теоремы геометрии окружности. Большую роль в геометрии окружности играет «трехокружник» – фигура из трех пересекающихся окружностей. Она аналогична треугольнику, роль сторон треугольника играют окружности, а роль вершин треугольника – точки пересечения окружностей между собой. Верны теоремы, аналогичные теоремам о пересечении высот и биссектрис треугольника. В зависимости от расположения составляющих его окружностей, трехокружник моделирует геометрии Лобачевского, Римана и Евклида. Подробно об уроках рассказано в файле LessonsText на прилагающемся диске. Главный методический принцип занятий – вводимое новое понятие должно эффективно использоваться для доказательства теорем или построения красивых образов, использование понятия может даже предшествовать его точной формулировке.

© Наши авторы, 2011.
Our authors, 2011.

Пименов Револьт Револьтович,
геометр, программист,
редактор интернет-журнала
«Богемный Петербург».